CAPITOLO 1 : VETTORI

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

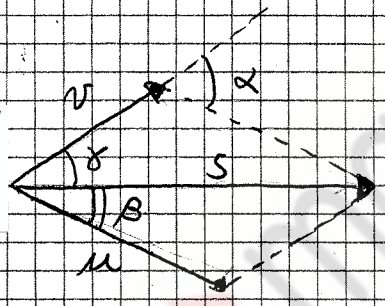
OPERAZIONI TRA VETTORI

(i) SOMMA VETTORIALE:

Dati due vettori u e v, anche non applicati nello stesso punto, il vettore somma S è definito come:

$$S = u + v$$

e si ottiene per via grafica attraverso la regola del parallelogramma:

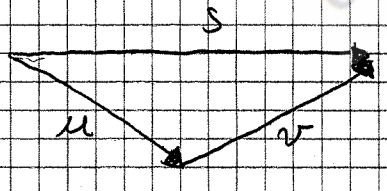


Utilizzando il teo di Carnot e quello dei seni si possono determinare il modulo del vettore somma $|S|$ e gli angoli β e γ che esso forma con u ed v:

$$|S| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2|u||v|\cos(\pi - \alpha)} \qquad \sin\beta = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{|S|}|v|$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{|S|}|u|$$

Un metodo più semplice per la somma di vettori è:

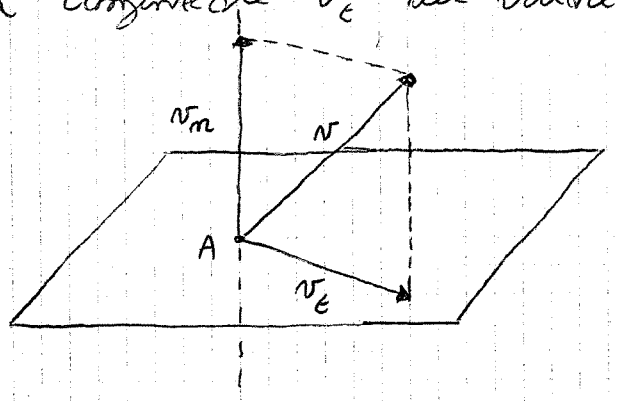


(ii) DECOMPOSIZIONE VETTORIALE

Il metodo del parallelogramma può anche essere utilizzato per la decomposizione di un vettore. Il metodo più utile per la decomposizione si ottiene proiettando ortogonalmente l'estremo del vettore sul piano estraendo

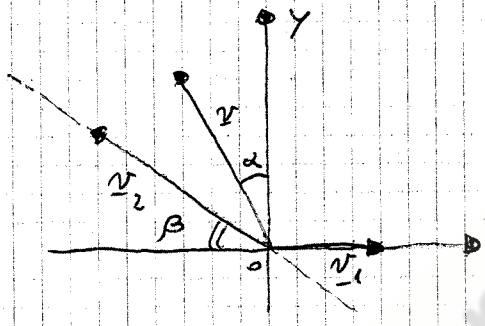
così un ottangolo, dal quale si determinano la componente normale v_n e quella tangenziale v_t del vettore v, tali che:

$$v = v_n + v_t$$



- ESERCIZIO:

DECOMPOSIZIONE VETTORE con componenti



$\underline{v} = |10|$

$\alpha = 30°$

$\beta = 45°$

trovo le componenti di $\underline{v} = \begin{bmatrix} -|v| \sin\alpha \\ |v| \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \cdot 1/2 \\ 10 \cdot \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_1 = c_1 \underline{i}$ $\quad \underline{i} = \text{versore} = (1, 0)$

$\underline{v}_2 = c_2 \underline{v}_2$ $\quad \underline{v}_2 = \text{versore} // = (\cos\beta, -\sin\beta)$

si ottiene così un sistema:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \cos\beta \\ -c_2 \sin\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 = c_1 + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\sqrt{3} = -c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -5 + \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5 + 5\sqrt{3} \\ c_2 = -5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\underline{v}_1 = -5 + 5\sqrt{3}\ \underline{i}$

$\underline{v}_2 = -\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \underline{v}_2$

$\underline{v} = -5 + 5\sqrt{3}\ \underline{i} - \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \underline{v}_2$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

(III) PRODOTTO TRA UNO SCALARE E UN VETTORE

Il prodotto tra uno scalare c ed un vettore $\underline{u}$

$$\underline{w} = c \cdot \underline{u} \qquad (1.1)$$

mi dà un vettore:

$\underline{w}$: con modulo: $|\underline{w}| = |c| \cdot |\underline{u}|$
con direzione: $\underline{w} \parallel \underline{u}$
con verso concorde se $c > 0$
con verso discorde se $c < 0$

Si può esprimere la (1.1) con vettori di modulo unitario, denominati versori:

$$\underline{v} = v \cdot \underline{\hat{v}} \quad \text{con} \quad |\underline{\hat{v}}| = 1$$

Dato un vettore $\underline{v}$, il versore ad esso associato si indica come:

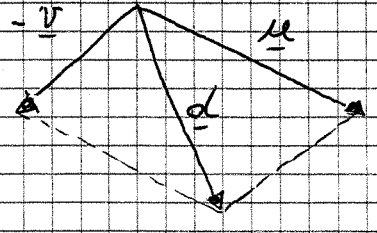
$$\text{vers}\, \underline{v} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

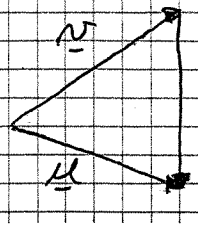
(IV) DIFFERENZA TRA VETTORI

La differenza tra due vettori può essere definita come la somma di uno con l'opposto dell'altro:

$$\underline{d} = \underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$$

per via grafica risulta:





$$\underline{v} + \underline{d} = \underline{u}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

(V) PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra 2 vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ ha come risultato uno scalare, che può essere positivo, negativo o nullo

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{v}||\underline{u}| \cos\alpha \quad (1.2)$$

in base al valore del coseno dell'angolo α.
Se il prodotto scalare tra 2 vettori è nullo essi sono tra loro ortogonali.
Data una direzione identificata dal versore $\underline{\lambda}$, la componente di $\underline{v}$ lungo $\underline{\lambda}$ sarà:

$$v_{\lambda} = \underline{v} \cdot \underline{\lambda}$$

Il vettore componente di $\underline{v}$ lungo la direzione $\underline{\lambda}$ diviene pertanto

$$\underline{v}_{\lambda} = (\underline{v} \cdot \underline{\lambda})\,\underline{\lambda}$$

L'equazione (1.2) può essere utilizzata per calcolare l'angolo tra due vettori:

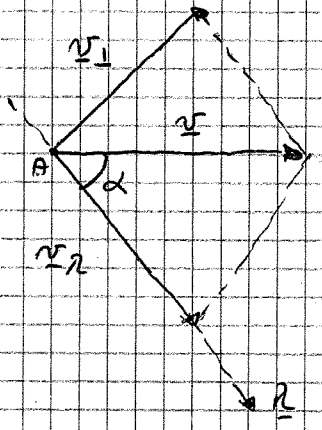
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right)$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- ESERCIZIO

Dato $\underline{v}$ trovare $\underline{v}_{\lambda}$



$$|\underline{v}_{\lambda}| = |\underline{v} \cdot \underline{\lambda}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{\lambda}| \cos\alpha =$$

$$= |\underline{v}| \cos\alpha$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

(VI) PRODOTTO VETTORIALE

È un'operazione tra due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ ed ha per risultato un vettore $\underline{w}$

$$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} \quad \text{o} \quad \underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

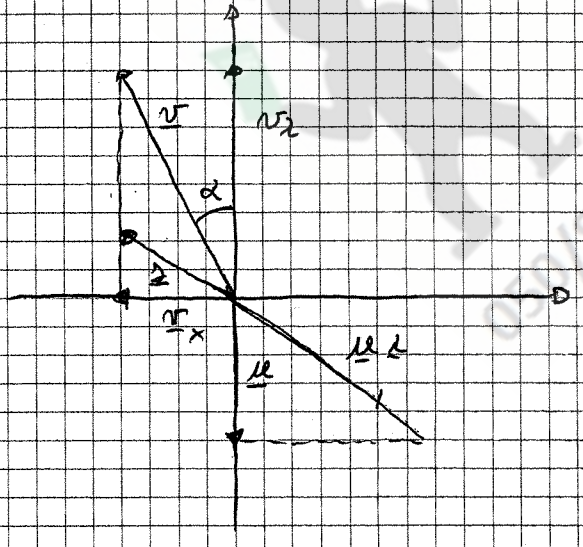
caratterizzato da:

- MODULO: $|\underline{w}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\alpha$ con $\sin\alpha \geq 0$ (angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$)
- DIREZIONE: ortogonale a $\underline{u}$ e $\underline{v}$ ed è nulla se $\underline{u} \parallel \underline{v}$
- VERSO: determinabile con regola della mano destra

$$\begin{cases} \text{INDICE} = \underline{u} \\ \text{MEDIO} = \underline{v} \\ \text{POLLICE} = \underline{w} \end{cases} \qquad \underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(u_y v_z) - (u_z v_y)\right]\underline{i} - \left[(u_x v_z) - (u_z v_x)\right]\underline{j} + \left[(u_x v_y) - (u_y v_x)\right]\underline{k}$$

- ESERCIZIO DI RIEPILOGO



$$|\underline{v}| = 10$$

$$\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Calcolo le componenti del vettore $\underline{v}$ prima di tutto

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} |v|\cos\frac{2\pi}{3} \\ |v|\sin\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$